

Применение МКЭ для анализа статических и динамических режимов работы многопролетных участков воздушных ЛЭП

Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой эффективный и достаточно универсальный способ численного решения инженерных задач, связанных с моделированием механических и физических процессов. Систематическое использование этого метода началось в середине 1950-х годов одновременно с внедрением в расчетную практику ЭВМ, и было нацелено на решение сложных прикладных задач [1]. В настоящее время область применения МКЭ обширна вследствие большой общности и единообразия процедуры формирования систем уравнений. В 1965 г. было показано [2], что МКЭ можно рассматривать как один из вариантов хорошо известного метода Рэлея-Ритца. Связь МКЭ с процедурой минимизации функционала задачи (энергии) привела к созданию чрезвычайно плодотворной общей процедуры сведения исходной задачи к системам алгебраических уравнений [3]. В строительной механике, как известно, МКЭ позволяет свести задачу к системе уравнений статического или динамического равновесия, минимизируя механическую энергию системы [3, 4].

В последнее время МКЭ стал интенсивно внедряться в практику проектирования воздушных линий электропередачи для моделирования и анализа статического и динамического поведения фазных проводов, грозозащитных тросов, гирлянд изоляторов и других элементов конструкций ЛЭП под воздействием климатических и технологических нагрузок [5-7]. Конечно-элементная методология позволяет строить модели, учитывающие сложную пространственную конфигурацию конструкций, взаимодействие их частей, разнообразные технологические и климатические эксплуатационные условия. Причем, модель может быть иерархической, степень усложнения которой (уточнение модели, включение в расчет дополнительных связей, новых типов элементов, условий функционирования) не нарушает общую методологию решения задачи. Эти факторы выгодно отличают МКЭ от других методов решения, например, аналитических [7] или конечно-разностных [8], которые нацелены на решения строго определенного класса задач при сильных ограничениях на наличие нелинейных факторов в исходной задаче и на точность полученных результатов.

В данной работе излагается подход к построению разрешающих систем нелинейных уравнений для моделирования статических и динамических процессов в фазных проводах для многопролетных участков ВЛ, а также в других одномерных конструктивных элементах линии (гирляндах изоляторов, опорах и т.п.). Предлагается способ построения корректных функций формы на основе приближенного решения уравнений равновесия для стержневого элемента. Методология демонстрируется на простом примере решения нелинейной статической задачи, имеющей практический интерес.

1. Основные допущения. В статье рассматривается плоская задача, т.е. полагается, что упругие оси элементов в любой момент времени движения принадлежат одной плоскости, а кручение отсутствует. Соответственно, конфигурацию системы будем описывать в прямоугольной декартовой системе координат OXY .

За типовой конструктивный элемент будем принимать стержень (балку), обладающий жесткостью на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг. Провод или трос будем рассматривать как частный случай стержня, когда изгибная жесткость мала или стремится к нулю. В дальнейшем изложении такой типовой элемент будем называть стержневым.

Принимается, что соединения стержневой системы могут быть как жесткими, так и шарнирными. Изменение начальной конфигурации системы может происходить либо в результате воздействия внешней нагрузки, либо в результате предписанных изменений кинематических параметров.

Считается, что при деформации стержневых элементов поперечные сечения смещаются и поворачиваются друг относительно друга, оставаясь плоскими и недеформированными в своей плоскости. Но в отличие от гипотезы плоских сечений Бернулли полагается, что сечения не остаются нормальными к упругой оси стержня, т.е. учитываются деформации сдвига, осредненные в некотором (например, энергетическом) смысле.

Стержни разбиваются на прямолинейные элементы конечной длины $l^{(k)}$. Считается, что каждый элемент имеет два узла, ассоциированные с его краевыми сечениями. Здесь и далее верхний индекс (k) обозначает номер элемента; $k = 1, \dots, N$, где N – число конечных элементов в системе. Если из контекста ясно, что обозначения или формулы относятся к элементу с номером (k) , то верхний индекс будем опускать.

Каждый элемент связывается с локальной (элементной) системой координат Oxy , совершающей движение совместно с конечным элементом [9, 10]. Локальная система «привязывается» к элементу таким образом, чтобы ось Ox проходила через точки оси (узлы 0, 1), принадлежащие краевым сечениям элемента (рис.1).

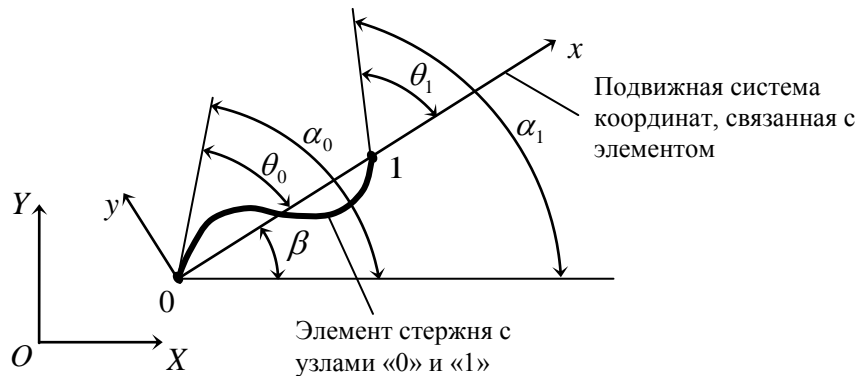


Рис.1. Конечный элемент и связанная с ним локальная система координат

В качестве функций формы принимаются квазистатические аппроксимации локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента в переменных элементной системы координат. Они строятся на основе решения однородной линейной статической задачи в зависимости от углов поворотов узловых сечений элемента как функций времени. Перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости элементных осей, совершающих движение относительно инерциальной системы координат OXY , учитываются строго. При математической формулировке учитываются геометрические нелинейности упругого деформирования элементов, соответствующие конечным деформациям, и нелинейности инерционных сил, обусловленные вращением, а также изменением геометрии системы вследствие относительных перемещений, поворотов и деформаций. Для упрощения вычислений, распределенные массовые характеристики стержневого элемента (собственно масса, моменты инерции) и нагрузка приводятся к узлам конечно-элементной модели.

В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные координаты полюсов узловых сечений и углы их поворотов.

2. Соотношения в переменных локальной системы координат. Обозначим через u и v продольное и поперечное перемещения точки сечения стержневого элемента относительно осей

локальной системы координат. Упругой осью элемента будем считать гладкую линию, проходящую через центры тяжести сечений.

В соответствии с принятой гипотезой плоских сечений деформация $\varepsilon_y = \partial v / \partial y = 0$, откуда следует, что $v = v(x)$. Пусть осредненная по сечению сдвиговая деформация $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x)$. Тогда, из соотношения $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ получаем выражение для продольного перемещения точки сечения: $u(x, y) = u_0(x) - y\theta(x)$. Здесь: $u_0(x)$ – осевое перемещение точки сечения, $\theta = v' - \gamma_{xy}$ – угол наклона сечения относительно локальной оси Ox . В случае поперечного изгиба осевое перемещение нейтральной оси элемента отсутствует, т.е. можно положить $u_0(x) \equiv 0$. В этом случае продольная деформация волокна стержня $\varepsilon_x = \partial u / \partial x = -y\theta'$, сдвиговая деформация $\gamma_{xy} = v' - \theta$; величины со штрихом обозначают производные по локальной координате x .

Напряжения σ_x и τ_{xy} связаны с деформациями ε_x и γ_{xy} соотношениями упругости: $\sigma_x = E\varepsilon_x$, $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, где E , G – модули Юнга и сдвига.

Обозначим через M , Q , N изгибающий момент, поперечную и продольную силы, действующие в сечении элемента. Тогда,

$$M = \int_F (y - v)\sigma_x dF = -\int_F E(y - v)y\theta' dF = -EJ_z\theta', \quad Q = \int_{F_c} G\gamma_{xy} dF_c = GF_c(v' - \theta), \quad (1) \quad \text{где}$$

$J_z = \int_F y^2 dF$ – собственный момент инерции сечения относительно нейтральной линии сечения, нормальной к плоскости Oxy ; $F_c = \int_{F_c} dF_c$ – эквивалентная площадь поперечного сечения, работающая на сдвиг.

При вычислении продольной силы будем использовать нелинейное выражение для осевой деформации в виде

$$\varepsilon_0 = u' + (1/2)v'^2. \quad (2)$$

В этом случае,

$$N = \int_F E\varepsilon_0 dF = EF[u' + (1/2)v'^2], \quad (3)$$

где $F = \int_F dF$ – площадь поперечного сечения.

Величины EJ_z , GF_c и EF , входящие в (1), (3), представляют собой жесткости на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие, соответственно.

Потенциальная энергия элемента записывается в виде [11]

$$U = (1/2) \int_0^l \left(N^2/EF + M^2/EJ_z + Q^2/GF_c \right) dx, \quad (4)$$

где N , M , Q определяются выражениями (1), (3).

Уравнения статического равновесия получим на основе вариационного принципа Лагранжа, минимизируя функционал (4) без учета энергии растяжения-сжатия [9-11]. Из условия равенства нулю вариации потенциальной энергии U , приходим к однородной системе уравнений относительно $\theta(x)$ и $v(x)$:

$$\theta''' = 0, \quad v' - \theta + \theta'' l^2 (1 - \kappa)/(12\kappa) = 0, \quad (5)$$

где безразмерный коэффициент $\kappa = \left[1 + 12EJ_z/(l^2GF_c) \right]^{-1}$. Если пренебречь сдвигом, то $GF_c \rightarrow \infty$ и $\kappa = 1$.

С учетом граничных условий $v(0) = v(l) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\theta(l) = \theta_1$ нетрудно получить решение (5) в виде:

$$\theta = \mathfrak{g}^T \begin{pmatrix} 1 - (1 - 3\kappa)\bar{x} + 3\kappa\bar{x}^2 \\ (1 - 3\kappa)\bar{x} + 3\kappa\bar{x}^2 \end{pmatrix}, \quad v = l\mathfrak{g}^T \begin{pmatrix} 0.5(1 + \kappa)\bar{x} - 0.5(1 + 3\kappa)\bar{x}^2 + \kappa\bar{x}^3 \\ -0.5(1 - \kappa)\bar{x} + 0.5(1 - 3\kappa)\bar{x}^2 + \kappa\bar{x}^3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathfrak{g} = (\theta_0, \theta_1)^T$, $\bar{x} = x/l$.

Принимая допущение, что осевая деформация ε_0 является величиной постоянной в пределах элемента, из (2) получим $u' = \varepsilon_0 - (1/2)v'^2$.

Отсюда следует выражение для продольного перемещения

$$u(x) = u_0 + l \left[\varepsilon \bar{x} - (1/2) \int_0^{\bar{x}} v'^2 d\bar{x} \right]. \quad (7)$$

Для узла 0 $u_0 \equiv 0$. Подставляя в (7) выражение для v из (6), после интегрирования по переменной \bar{x} от 0 до 1 будем иметь:

$$u_1 = l \left[\varepsilon - (1/2) \mathfrak{g}^T \begin{pmatrix} 1/12 + \kappa^2/20 & -1/12 + \kappa^2/20 \\ -1/12 + \kappa^2/20 & 1/12 + \kappa^2/20 \end{pmatrix} \mathfrak{g} \right].$$

Тогда продольная деформация

$$\varepsilon = u_1/l + (1/8)\left[(1/3)(\theta_1 - \theta_0)^2 + (\kappa^2/5)(\theta_1 + \theta_0)^2\right]. \quad (8)$$

Запишем слагаемые потенциальной энергии деформированного элемента отдельно для состояний растяжения-сжатия, изгиба и сдвига.

С учетом выражения (8) для состояния растяжения-сжатия получим:

$$U^N = (1/2)\int_0^l EF \varepsilon^2 dx = EF/(2l)\left\{u_1 + (1/8)\left[(1/3)(\theta_1 - \theta_0)^2 + (\kappa^2/5)(\theta_1 + \theta_0)^2\right]\right\}^2. \quad (9)$$

Вклад поперечного изгиба в суммарную потенциальную энергию элемента выражается формулой:

$$U^M = (1/2)\int_0^l EJ_z \theta^2 dx = (1/2)(EJ_z/l)\left[(\theta_1 - \theta_0)^2 + 3\kappa^2(\theta_1 + \theta_0)^2\right]. \quad (10)$$

Для состояния сдвига будем иметь:

$$U^Q = (1/2)\int_0^l GF_c (v' - \gamma_{xy})^2 dx = (3/2)(EJ_z/l) \kappa(1 - \kappa)(\theta_0 + \theta_1)^2. \quad (11)$$

Выражение для суммарной потенциальной энергии получим, объединяя (9), (10) и (11). В итоге:

$$U = (1/2)\left\{(EJ_z/l)\left[(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + 3\kappa(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2\right] + N^2 l / EF\right\}, \quad (12) \text{ где про-}$$

дольная сила $N = EF\left\{u_1/l + (1/8)\left[(1/3)(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\kappa^2/5)(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2\right]\right\}$; α_0 , α_1 и β – углы поворотов узловых сечений и локальной системы координат относительно координатной системы OXY ; $u_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} - l$ – продольное перемещение узла «1» отсчитываемого вдоль локальной оси Ox .

3. Уравнения динамического и статического равновесия. Нелинейные уравнения движения записываются в обобщенных координатах по методу Лагранжа и имеют вид [1, 3, 11]

$$m_i \ddot{q}_i + \partial U^\Sigma / \partial \dot{q}_i = Q_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Отбрасывая в уравнении (13) инерционные члены, приходим к системе нелинейных уравнений статического состояния:

$$\partial U^\Sigma / \partial q_i = Q_i. \quad (14)$$

В уравнениях (13), (14) m_i – i -й элемент диагональной матрицы масс, $U^\Sigma = \sum_{k=1}^N U^{(k)}$ – суммарная потенциальная энергия системы, где $U^{(k)}$ – потенциальная энергия k -го элемента; Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i ; N – количество элементов в системе.

К уравнениям динамики (13) необходимо добавить начальные условия для обобщенных координат и их скоростей. В итоге приходим к задаче Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений движения. Ее решение строится численными методами [12-14].

Алгоритм решения уравнений статического равновесия (14) иной, поскольку эти уравнения представляют собой связанную систему нелинейных уравнений относительно искомым обобщенных координат q_i (абсолютных координат полюсов узловых сечений и углов их поворотов). Для решения (14) воспользуемся методом продолжения решения по параметру задачи p [15-16]. Параметр p вводится следующим образом: считается, что нагрузка, распределенная по конструкции в соответствии с условиями нагружения, изменяется пропорционально параметру p , причем $0 \leq p \leq 1$. Тогда, в соответствии с процедурой метода продолжения, система (14) дифференцируется по параметру p , который рассматривается как аргумент задачи. Разрешающая система уравнений в этом случае принимает вид

$$\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right\| \frac{d}{dp} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^* \\ \vdots \\ F_N^* \end{pmatrix},$$

где K_i – касательная матрица жесткости; q_i , F_i^* ($i=1, \dots, N$) – обобщенные координаты и амплитудные значения внешних узловых сил и моментов, соответствующие этим координатам. Конечное решение достигается в результате построения решений последовательности линеаризованных задач с использованием известных методов интегрирования начальной задачи Коши [12].

4. Пример. В качестве примера были выполнены расчеты перехода ВЛ 330 кВ через Волгу вблизи Конаковской ГРЭС. Схема этого перехода приведена на рис. 2: рассматриваются три пролета линии; подвесные гирлянды считаются одинаковыми и моделируются как стержневые системы некоторых приведенных характеристик; стрелками обозначены известные силы тяже-

ния (T). Провод в пределах поддерживающего многороликового подвеса защищен протектором спирального типа. Для правильного выбора длины протектора необходимо дать оценку стрел провеса, а также перемещений провода в многороликовых поддерживающих подвесах.

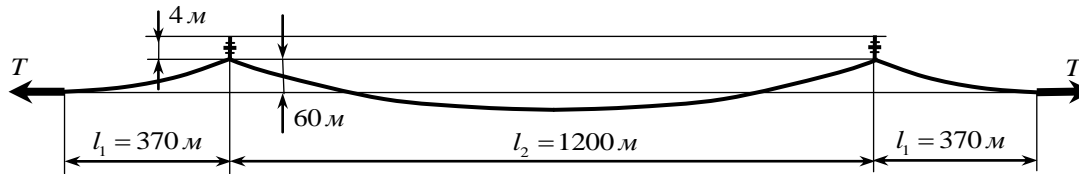


Рис. 2. Схема перехода ВЛ 330 кВ через Волгу вблизи Конаковской ГРЭС.

Формализация задачи следующая: рассматривается провод первоначальной длины $2 \cdot L_1 + L_2$, скрепленный в двух точках с вертикальными подвесками. Длина подвесок одинакова и равна $L_3 = 4$ м. Конструкция была разбита на 30 конечных элементов различной длины. Схема разбивки дана на рис. 3, где цифры обозначают номера узлов конечных элементов. Узлы 1 и 27 могут скользить по горизонтальным направляющим, принимая такие положения, которые отвечают равновесию системы под действием силы тяжения и сил веса провода. Узлы 29 и 31 также могут двигаться по горизонтали до некоторых равновесных положений. Начало глобальной системы совмещено с узлом 1. Оси X и Y направлены, соответственно, по горизонтали и вертикали.

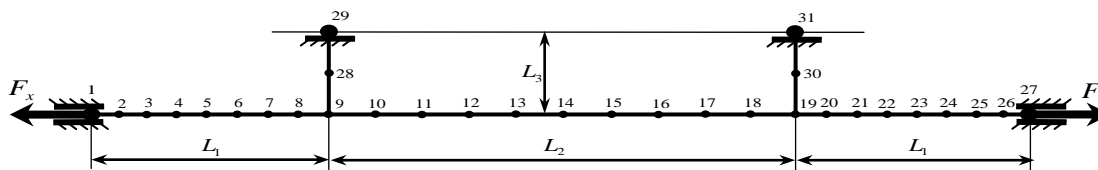


Рис. 3. Схема участка линии электропередачи в исходном (недеформированном) состоянии с разбивкой на конечные элементы.

Сначала необходимо так подобрать длины L_1 , L_2 так, чтобы в деформированном состоянии расстояния между характерными точками системы были равны монтажным размерам, указанным на рис. 2. Расчет должен проводиться с учетом присоединенной массы гололеда. Длины L_1 и L_2 можно, например, подобрать итерационным способом, повторяя многократно вычисления и минимизируя рассогласование между L_1 и L_2 с заданными значениями размеров l_1 и l_2 . Однако

такой выбор не гарантирует сходимости решения и трудоемок в реализации. В работе используется иной подход, состоящий в последовательном решении двух задач. В первой задаче в качестве параметра p принимается параметр внешней нагрузки и рассматривается деформирование провода, который в недеформированном состоянии соединяет опоры без тяжения. Во второй задаче параметром продолжения считается параметр длины конечного элемента: $l^{(k)} = p l_0^{(0)}$ ($p \geq 1$), а в качестве начальных условий принимается конечное решение первой задачи. В процессе решения изменяются длины конечных элементов пропорционально параметру p и отслеживаются стрелы провеса, а также тяжение в проводе. Если какая-либо из этих величин превышает заданное значение, то процесс решения останавливается, и из этого состояния берутся величины для L_1 и L_2 .

Были рассмотрены девять расчетных режимов, перечисленные в Таблице 1.

Для каждого из перечисленных расчетных режимов определялись возможные перемещения провода относительно точек подвески. За исходный был принят режим, когда провода во всех пролетах покрыты гололедом, а температура окружающей среды $\Theta = -5^\circ C$. Трение в роликах не учитывалось. Результаты выполненных расчетов представлены на рис. 4.

Таблица 1

№ режима	Расчетные режимы	Температура окружающей среды
1	Гололедом покрыты все три пролета.	$-5^\circ C$
2	Гололедом покрыт только средний пролет.	
3	Гололедом покрыты только крайние пролеты.	
4	Гололед отсутствует во всех трех пролетах.	
5	Гололедом покрыты все три пролета.	$-40^\circ C$
6	Гололедом покрыт только средний пролет.	
7	Гололедом покрыты только крайние пролеты.	
8	Гололед отсутствует во всех трех пролетах.	
9	Гололед отсутствует во всех трех пролетах.	$-38^\circ C$

Тяжение во всем анкерном пролете в большей степени определяется статическими нагрузками, действующими на средний переходный пролет, поскольку он является наиболее протяженным. В более же коротких (крайних) пролетах изменение внешних климатических нагрузок приводит к большему изменению длины провода.

Таким образом, средний пролет в большей степени “отвечает” за тяжение в анкерном пролете, а крайние пролеты – за величину возможных перемещений провода из одного пролета в другой.

Из всех рассмотренных режимов наибольшие перемещения провода были отмечены в варианте, когда сначала провода во всех трех пролетах покрыты гололедом, а затем происходит сброс гололеда в среднем пролете.

При сбросе гололеда в среднем пролете около 1,1 м провода перемещается из среднего пролета в крайний через многороликовый подвес. При сбросе гололеда в крайних пролетах перемещение провода из крайнего в средний пролет составит всего лишь ~0,4 м. Примерно такое же перемещение возникает при изменении температуры от минимальной до максимальной. Приведенные оценки сделаны с запасом – из-за трения в роликах реальные перемещения будут меньше.

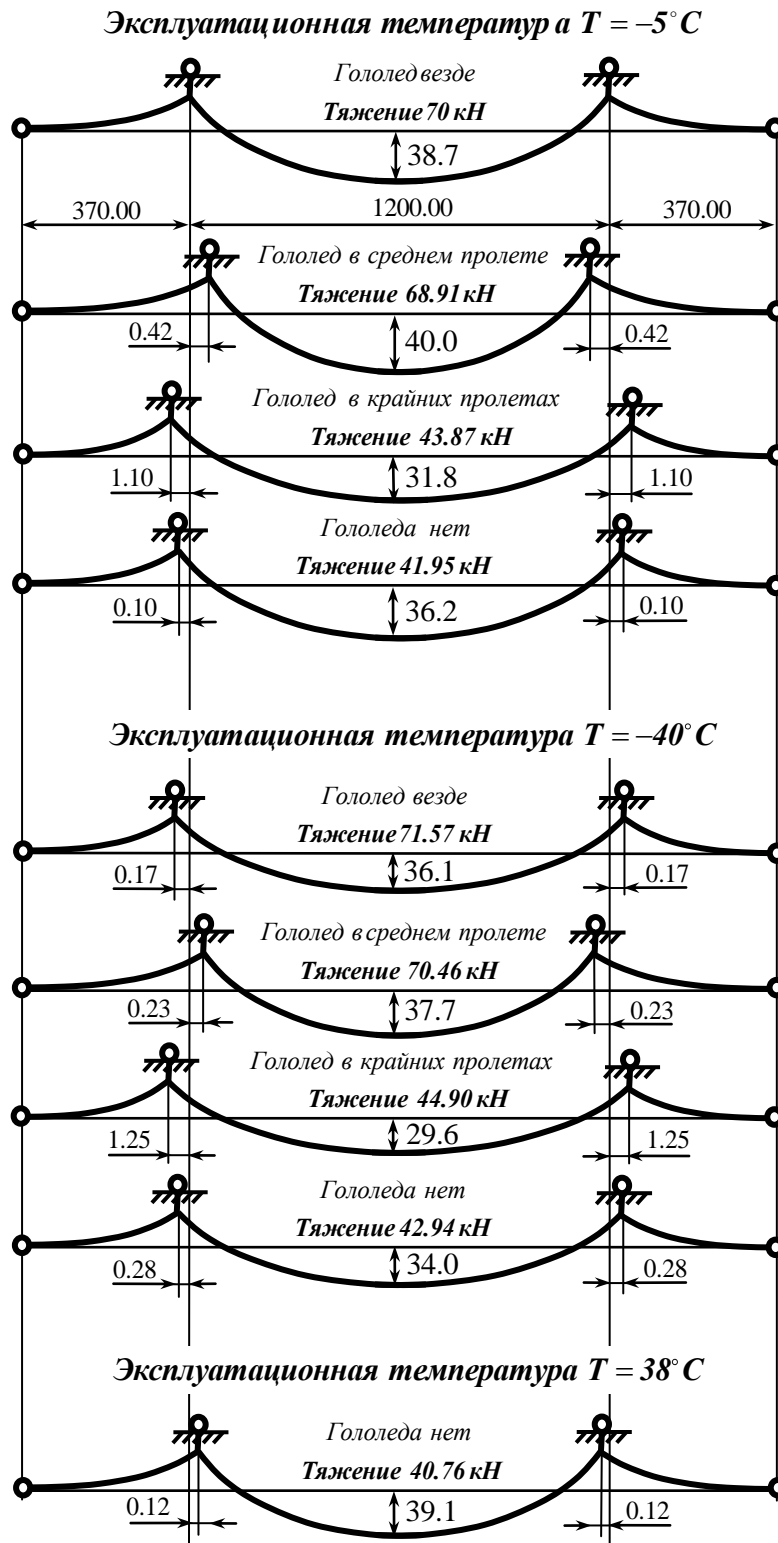


Рис. 4. Перемещение провода в многороликовых поддерживающих подвесах в различных климатических режимах.

Таким образом, из всех рассмотренных расчетных случаев определяющим явился режим сброса гололеда в среднем пролете. Поэтому расчетная длина протектора составила $2240 + 1100 \approx 3400$ мм. Эта оценка сделана со значительным запасом, так как рассмотренные расчетные случаи являются крайне маловероятными событиями. С учетом неточностей монтажа и некоторой неопределенности в положении многороликовых подвесов на момент установки протекторов, было принято решение изготовить протекторы для данного перехода длиной 4000 мм.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 07-01-00665.

Литература

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Изд-во «Мир». 1979. 392 с.
2. Melosh R.J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *J. Am. Inst. for Aeronautics and Astronautics*. V. 1. 1965. P. 1631-1637.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Изд-во «Мир». 1975. 541 с.
4. Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат. 1993. 664 с.
5. Fujii K., Kuze T. Analysis of conductor swinging for overhead transmission line using the finite element method. *Int. Symposium on Cable Dynamics. Liege (Belgium)*, October 19-21. 1995. P.133-140.
6. Fekr M.R., McClure G., Farzaneh M. Application of ADINA to stress analysis of an optical ground wire. *Computers and Structures*. V. 72. 1999. P. 301-316.
7. Gattulli V., Martinelli L., Perotti F., Vestroni F. Nonlinear interactions in cables investigated using analytical and finite element models. *4 Int. Symposium on Cable Dynamics. Montreal (Canada)*, May 28-30. 2001. P. 93-100.
8. Vinogradov A.A., Sergey I.I. Mathematical simulation and calculation experiment for different forms of transmission line conductors dynamics. *5 Int. Symposium on Cable Dynamics. Santa Margherita (Italy)*, Sept. 15-18, 2003. P. 93-100.
9. Данилин А.Н. Нелинейные уравнения движения гибких стержневых систем. *Изв. РАН, МТТ*, 1994, №1. С.177-188.

10. Данилин А.Н., Волков-Богородский Д.Б. О неявных методах интегрирования параметризованных уравнений нелинейных динамических систем. *Вестник МАИ*. 2001. Т. 8. № 2. С. 40-52.
11. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1986. 536 с.
12. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М., Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
13. Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О неявных алгоритмах интегрирования задачи Коши для параметризованных уравнений, описывающих динамическое поведение механических систем. *ПММ*. Т.67. Вып. 6. 2003. 1053-1069 с.
14. Danilin A.N., Snegovski D.V., Volkov-Bogorodski D.B. On implicit algorithms of continuation method with application to dynamics systems. *J. Comp. and Applied Mathematics*. V. 164-165. 2004. P. 207-224.
15. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 232 с.
16. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.